



الف

A

آمادگی کنکور ۱۴۰۰

O3F

D

دوپینگ ماز

آزمون دوپینگ ماز – ۱۴۰۰/۰۳/۲۳

دفترچه پاسخ ریاضی (رشته تجربی)

مدت پاسخ گویی: ۴۷ دقیقه

تعداد سؤال: ۳۰

طراحان سؤال	ویراستاران
مهرداد کیوان	سید جواد نظری
حسین شفیع زاده	ارسلان حسنونند

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱- اگر خط $y = 3x - 1$ بر $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر نمودار f مماس باشد، مشتق $y = xf''(x)$ در $x = 1$ چه عددی است؟

۲۴ (۴)

۱۸ (۳)

۱۶ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

چون خط $y = 3x - 1$ بر نمودار f در $x = 1$ مماس شده است، پس مقدار مشتق در $x = 1$ برابر شیب خط مماس در این نقطه است. و نقطه تماس نقطه مشترک تابع و خط مماس است.

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 3 \end{cases}$$

از طرفی

$$y = xf''(x) \Rightarrow y' = f''(x) + 2f'(x)f''(x) \cdot x \\ \Rightarrow y'(1) = f''(1) + 2f'(1)f''(1) \times 1 \Rightarrow y'(1) = 4 + 2 \times 2 \times 3 = 16$$

۲- تابع $f(x) = |x-1| - a$ در $x = 2$ مشتق ناپذیر است، جمع طول نقاط مشتق ناپذیر کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

اگر قرار باشد، تابعی به فرم $y = |x-1| - a$ در $x = 2$ مشتق ناپذیر باشد، باید $x = 2$ ریشه داخل قدر مطلق باشد، یعنی:

$$|2-1| - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

اما با یافتن a می‌توانیم تمام نقاط مشتق ناپذیر f را بیابیم.

$$|x-1| - 1 = 0 \Rightarrow |x-1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 1 \Rightarrow x = 2 \\ x-1 = -1 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

علاوه بر آن تابع در $x = 1$ هم مشتق ناپذیر است. پس کلاً در $x = 0$ و $x = 1$ و $x = 2$ مشتق ناپذیر است و جمع آنها ۳ است.

۳- اگر $f(x) = \frac{(2x^2 - 3x - 2)\sqrt{4x+1}}{x^2 + x}$ ، مقدار $f'(2)$ چه عددی است؟

۴/۵ (۴)

۳ (۳)

۲/۵ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

نکته: اگر g تابعی پیوسته باشد و $f(x) = (x - \alpha) \cdot g(x)$ آنگاه $f'(\alpha) = g(\alpha)$. (مشتق‌گیری از عامل صفر شونده)

برای حل تست و یافتن $f'(2)$ داریم:

$$f(x) = \frac{(x-2)(2x+1)\sqrt{4x+1}}{x^2+x} = (x-2) \cdot \frac{(2x+1)\sqrt{4x+1}}{x^2+x}$$

$$\Rightarrow f'(2) = 1 \times \frac{5\sqrt{9}}{6} \Rightarrow f'(2) = \frac{15}{6} = 2/5$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



$$f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{\sqrt{x+2}} + 1 & x \geq 2 \\ 2x^2 + b & x < 2 \end{cases}$$

۴- اگر $x=2$ در $f(x)$ مشتق پذیر باشد، مقدار b کدام است؟

$$-9 \quad (4)$$

$$-23 \quad (3)$$

$$-55 \quad (2)$$

$$-71 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۱

نکته: شرط آنکه تابع f در نقطه α مشتق پذیر باشد آن است که:

$$(1) \quad f \text{ در } \alpha \text{ پیوسته باشد.}$$

$$(2) \quad f'_-(\alpha) = f'_+(\alpha)$$

ابتدا شرط پیوستگی را بررسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow a+1 = 8+b$$

سپس مشتق تابع را به دست می آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-a}{(x+2)\sqrt{x+2}} & x \geq 2 \\ 4x & x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'_-(2) = f'_+(2) \Rightarrow \frac{-a}{8} = 8 \Rightarrow \begin{cases} a = -64 \\ b = -71 \end{cases}$$

$$5- \quad f \text{ یک تابع پیوسته ای باشد که } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x^2-3x+2} = -2 \text{، مشتق } y = f \circ f(x) \text{ در } x=1 \text{ کدام است؟}$$

$$4 \quad (4)$$

$$9 \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

$$\text{نکته: } (f \circ g)'(\alpha) = g'(\alpha) \cdot f'(g(\alpha))$$

با توجه به آنکه $x=1$ ریشه مخرج است، ریشه صورت نیز می باشد. پس $f(1)=1$ از این رو:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x)-f(1))}{-(x-1)} = -f'(1)$$

$$\Rightarrow -f'(1) = -2 \Rightarrow f'(1) = 2$$

به این ترتیب $f(1)=1$ و $f'(1)=2$ پس:

$$y = f \circ f(x) \Rightarrow y'(1) = f'(1) \cdot f'(f(1))$$

$$y'(1) = (f'(1))^2 = 2^2 = 4$$

$$6- \quad \text{هرگاه } f(x) = x\sqrt{2 + \frac{2}{x}} \text{، مقدار } f'(2) \text{ چه عددی است؟}$$

$$\frac{7}{4} \quad (4)$$

$$\frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{7}{3} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



برای آنکه راحت تر حل شود، x را داخل رادیکال می‌بریم (x در همسایگی $x=3$ مثبت است)، پس:

$$f(x) = \sqrt{3x^2 + 3x}$$

نکته: $y = \sqrt{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$

به این ترتیب ابتدا مشتق تابع f را به دست می‌آوریم و سپس $x=3$ را جایگزین می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{6x+3}{2\sqrt{3x^2+3x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{21}{2\sqrt{27+9}} = \frac{21}{12} = \frac{7}{4}$$

۷- هرگاه $f(x) = 6x + \frac{2}{x}$ به طوری که $f'(1) = f''(\alpha)$ مقدار α کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

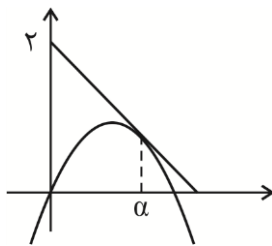
پاسخ: گزینه ۱

ابتدا توابع f' و f'' را مشخص می‌کنیم و سپس معادله را حل می‌کنیم.

$$f(x) = 6x + \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = 6 - \frac{2}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{4}{x^3}$$

$$f'(1) = f''(\alpha) \Rightarrow 4 = \frac{4}{\alpha^3} \Rightarrow \alpha = 1$$

۸- در شکل مقابل، نمودار سهمی $f(x) = 2x - x^2$ و خط مماس بر آن رسم شده است، مقدار α کدام است؟



$\sqrt{3}$ (۱)

$1/5$ (۲)

$\sqrt{2}$ (۳)

$1/75$ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

نکته: f تابعی مشتق پذیر باشد و $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ f(\alpha) \end{matrix} \right.$ نقطه‌ای روی نمودار f باشد، معادله خط مماس در نقطه A ، $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$ است.

$f(x)$ یک چند جمله‌ای است، مشتق پذیر است. فرض می‌کنیم $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ 2\alpha - \alpha^2 \end{matrix} \right.$ نقطه تماس باشد. معادله خط مماس در نقطه A را می‌نویسیم.

$$y - (2\alpha - \alpha^2) = (2 - 2\alpha)(x - \alpha)$$

امتداد خط مماس از $M \left| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right.$ عبور می‌کند، پس مختصات M در خط مماس صدق می‌کند.

$$2 - 2\alpha + \alpha^2 = (2 - 2\alpha)(0 - \alpha)$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



با حل معادله α را به دست می آوریم:

$$\alpha^2 - 2\alpha + 2 = -2\alpha + 2\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{2} \\ \alpha = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ غق}$$

پس مقدار $\alpha = \sqrt{2}$ قابل قبول است.

۹- خط مماس در نقطه‌ای به طول α روی نمودار $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$ با دامنه $[-1, 3]$ به موازات خطی است که دو نقطه ابتدا و انتهای دامنه را به هم وصل می کند. مقدار $f(\alpha)$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۱

روش اول: ابتدا شیب خطی که دو نقطه ابتدا و انتهای دامنه را به هم وصل می کند، مشخص می کنیم:

$$m = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{(18 - 12 + 1) - (2 + 4 + 1)}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

حالا باید نقطه‌ای را روی تابع مشخص کنیم که مماس در آن نقطه با شیب صفر باشد.

$$f'(\alpha) = 0 \Rightarrow 4\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

روش دوم: وقتی f چند جمله‌ای از درجه دوم باشد، آنگاه آهنگ تغییر متوسط در بازه $[\alpha, \beta]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای در $\frac{\alpha + \beta}{2}$ برابر است.

پس می توانیم در همان ابتدا بیان کنیم $\alpha = 1$.

۱۰- آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \frac{x+4}{2x+3}$ در بازه $[0, 1]$ با آهنگ تغییر لحظه‌ای f در α برابر است. مقدار $(2\alpha + 3)^2$ کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۱۲

(۲) ۱۸

(۱) ۱۵

پاسخ: گزینه ۱

نکته: آهنگ تغییر متوسط f بر بازه $[\alpha, \beta]$ برابر $\bar{f} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ و آهنگ تغییر لحظه‌ای f در α برابر $f'(\alpha)$ است. ابتدا آهنگ تغییر متوسط f را در بازه $[0, 1]$ به دست می آوریم:

$$\bar{f} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{5}{5} - \frac{4}{3}}{1} = -\frac{1}{3}$$

برای یافتن آهنگ تغییر لحظه‌ای f باید f' را به دست آوریم:

$$f'(x) = \frac{-5}{(2x+3)^2} \Rightarrow \frac{-5}{(2x+3)^2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow (2x+3)^2 = 15$$

پس داریم: $(2\alpha + 3)^2 = 15$

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۱- Max مطلق تابع $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 13$ بر بازه $[-1, 2]$ چقدر از Min مطلق تابع بر آن بازه بیشتر است؟

۲۰ (۴)

۹ (۳)

۱۱ (۲)

۲۷ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

برای یافتن Min مطلق و Max مطلق تابع پیوسته f بر بازه $[\alpha, \beta]$ ، نقاط بحرانی را یافته، مقدار تابع در نقاط بحرانی را با $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ با هم مقایسه می‌کنیم.

ابتدا مقدار تابع را در نقاط ابتدایی و انتهایی بازه مشخص می‌کنیم.

$$f(2) = -16 + 36 - 13 = 36 - 29 = 7$$

$$f(-1) = +2 + 9 - 13 = -2$$

با یافتن ریشه $f' = 0$ نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم.

$$f'(x) = -6x^2 + 18x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases} \quad (\text{خارج از بازه است}) \quad \text{غلق } x = 3$$

$$f(0) = -13$$

با مقایسه مقادیر به دست آمده داریم:

$$\begin{cases} \text{Max} = 7 \\ \text{Min} = -13 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = 20$$

۱۲- مجموع حداقل و حداکثر مقدار تابع $f(x) = x^3 - ax^2 + a^3$ در بازه $[0, a]$ برابر ۵۰ است. مقدار a کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

۲ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

برای یافتن Min مطلق و Max مطلق تابع پیوسته f در بازه $[\alpha, \beta]$ ، مقدار f در α و β و نقاط بحرانی را با هم مقایسه می‌کنیم.

پس ابتدا مقدار f را در نقاط دو سر بازه به دست می‌آوریم.

$$f(0) = a^3, \quad f(a) = a^3$$

حال نقاط بحرانی f را به دست می‌آوریم.

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \frac{2a}{3} \end{cases} \quad \text{طول نقاط بحرانی}$$

$$f(0) = a^3$$

$$f\left(\frac{2a}{3}\right) = \frac{8a^3}{27} - \frac{4a^3}{9} + a^3 = \frac{23}{27}a^3$$

با مقایسه مقادیر به دست آمده:

$$\text{Min} = \frac{23}{27}a^3$$

$$\text{Max} = a^3$$

$$\Rightarrow \text{Min} + \text{Max} = \frac{23}{27}a^3 + a^3 = \frac{50}{27}a^3 \Rightarrow \frac{50}{27}a^3 = 50 \Rightarrow a = 3$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۳- در یک مکعب مستطیل با اضلاع a و $3a$ و b اگر حجم آن برابر $4/5$ باشد، کمترین سطح کل این مکعب مستطیل چه عددی است؟

۳۶ (۴)

۲۴ (۳)

۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

می‌دانیم حجم مکعب مستطیل برابر است با حاصل ضرب سه یال مکعب مستطیل، پس $V = 3a^2b = \frac{4}{5}$ به همین جهت $a^2b = \frac{3}{5}$. اما سطح کل مکعب مستطیل با یال‌های a و b و c برابر $S = 2(ab + ac + bc)$ است. پس:

$$S = 2(3a^2 + ab + 3ab)$$

$$\Rightarrow S = 2(3a^2 + 4ab)$$

$$\text{اما } ab = \frac{3}{2a} \text{ پس:}$$

$$S(a) = 2\left(3a^2 + \frac{6}{a}\right)$$

برای آنکه کمترین مقدار S را به دست آوریم، ریشه‌ی $S' = 0$ را به دست می‌آوریم.

$$S'(a) = 2\left(6a - \frac{6}{a^2}\right) \Rightarrow S'(a) = 0 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \underline{S(1) = 18}$$

۱۴- حجم یک استوانه 2000π سانتی‌متر مکعب است. هرگاه سطح کل، کمترین مقدار ممکن باشد، شعاع قاعده چه عددی است؟

۸ (۴)

۱۵ (۳)

۱۱ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

نکته: در یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده r داریم:

$$\begin{cases} V = \pi r^2 h \\ S_{\text{جانبی}} = 2\pi r h \\ S_{\text{کل}} = 2\pi r h + 2\pi r^2 \end{cases}$$

چون حجم استوانه 2000π است، پس $\pi r^2 h = 2000\pi$ یعنی $r^2 h = 2000$. از طرفی قرار است، سطح کل کمترین باشد، پس:

$$S_{\text{کل}} = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

به جای h قرار می‌دهیم $h = \frac{2000}{r^2}$ و داریم:

$$S = 2\pi r \times \frac{2000}{r^2} + 2\pi r^2 = \frac{4000\pi}{r} + 2\pi r^2$$

به کمک مشتق r را چنان می‌یابیم تا S ، Min شود، پس $S' = 0$.

$$S' = -\frac{4000\pi}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{4000\pi}{r^2} = 4\pi r \Rightarrow r^3 = 1000 \Rightarrow \underline{r = 10}$$

در واقع برای آنکه S ، Min شود، ابتدا $S' = 0$ را حل کردیم و ریشه آن حداقل S را می‌دهد، تابع S ، Max مطلق ندارد.

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۵- تابع $f(x) = (x+a)\sqrt{x}$ در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی است. حدود a کدام است؟

(۴) $|a| \leq 3$

(۳) $|a| \geq 3$

(۲) $a \geq -3$

(۱) $a \leq -3$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: برای آنکه تابعی در بازه‌ای اکیداً صعودی باشد، باید مشتق در آن بازه مثبت باشد. دقت کنید با تعیین علامت مشتق می‌توانیم وضعیت یکنوایی تابع را معلوم کنیم.

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x+a) = \frac{3x+a}{2\sqrt{x}}$$

قرار است f در بازه $[1, +\infty)$ اکیداً صعودی باشد، مخرج که همواره مثبت است. برای آنکه $f' > 0$ کافی است در بازه $[1, +\infty)$ صورت کسر هم مثبت باشد، پس باید ریشه صورت قبل از $x=1$ باشد.

$$3x+a=0 \Rightarrow x=-\frac{a}{3} \Rightarrow -\frac{a}{3} \leq 1 \Rightarrow a \geq -3$$

با جدول تعیین علامت هم مشخص است.

x	$-\frac{a}{3}$
f'	$- \quad \quad +$

۱۶- تابع $f(x) = ax + \frac{b}{x+1}$ در نقطه $A(1, 3)$ دارای اکسترمم نسبی است. b و نوع اکسترمم کدام است؟

(۴) Min نسبی

(۳) Max نسبی

(۲) Min نسبی

(۱) Max نسبی

پاسخ: گزینه ۴

قرار است $A(1, 3)$ اکسترمم تابع مشتق‌پذیر f باشد، پس هر دو شرط $f'(1)=0$ و $f(1)=3$ هم‌زمان برقرار است.

$$f(1)=3 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 3$$

از طرفی:

$$f'(x) = a - \frac{b}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = a - \frac{b}{4} = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{4}$$

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} = 3 \\ a = \frac{b}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{4} + \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow \frac{3b}{4} = 3 \Rightarrow \begin{cases} b=4 \\ a=1 \end{cases}$$

حال می‌خواهیم نوع اکسترمم نسبی را مشخص کنیم.

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} \Rightarrow f'=0 \Rightarrow x+1 = \begin{cases} 2 \Rightarrow x=1 \\ -2 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

f' را تعیین علامت می‌کنیم.

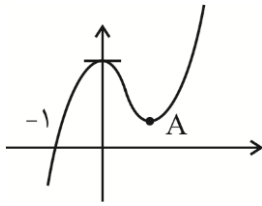
x	-3	-1	1
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	نسبی max		نسبی min

پس نوع اکسترمم Min نسبی است.

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۷- اگر شکل مقابل، نمودار تابع $y = 2x^3 + ax^2 + bx + 5$ باشد، حاصل جمع مختصات نقطه A کدام است؟



- (۱) ۳
(۲) ۴
(۳) ۵
(۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

با توجه به ضابطه f مشخص است، $f(0) = 5$ و البته نقطه $(0, 5)$ اکسترمم نسبی f است. پس:

$$f'(0) = 0 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(0) = b = 0$$

از طرفی $f(-1) = 0$ پس:

$$f(-1) = -2 + a - b + 5 = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$$

یعنی:

برای یافتن مختصات نقطه A داریم:

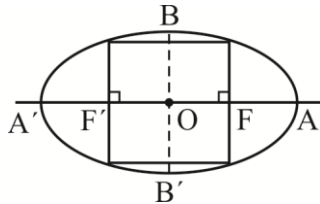
$$f'(x) = 6x^2 - 6x \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \Rightarrow x_A = 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 2 - 3 + 5 = 4 \Rightarrow A(1, 4)$$

$$x_A + y_A = 5$$

یعنی:

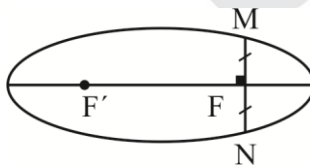
۱۸- اگر چهار ضلعی در شکل مقابل مربع باشد، کدام شرط برای بیضی برقرار است؟



- (۱) $2b^2 = ac$
(۲) $ac = b^2$
(۳) $2ac = b^2$
(۴) $b^2 = 4ac$

پاسخ: گزینه ۲

نکته: خطی که در کانون بر محور بیضی عمود باشد و بیضی را در M و N قطع کند، پاره خط MN را وتر کانونی بیضی می‌نامیم و مقدار آن $MN = \frac{2b^2}{a}$ است.



$$MN = \frac{2b^2}{a}$$

برای آنکه چهار ضلعی مربع باشد، باید اضلاع آن برابر باشند، اما یک ضلع مربع $FF' = 2c$ و ضلع دیگر آن وتر کانونی بیضی یعنی $\frac{2b^2}{a}$ است.

$$\frac{2b^2}{a} = 2c \Rightarrow b^2 = ac$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



۱۹- کانون‌های یک بیضی نقاط $F(2, 5)$ و $F'(2, -3)$ هستند. اگر بیضی بر محور عرض‌ها مماس باشد، خروج از مرکز بیضی چه عددی است؟

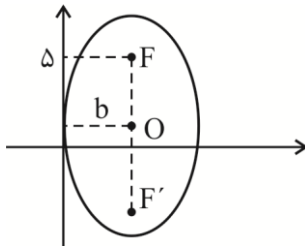
(۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(۳) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(۲) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

(۱) $\frac{\sqrt{5}}{8}$

پاسخ: گزینه ۴



اگر بیضی را رسم کنیم به راحتی قابل حل است.

مرکز بیضی وسط دو کانون است، پس $O(2, 1)$ مرکز بیضی است از طرفی $FF' = 2c$

پس $2c = 8$ یعنی $c = 4$ با توجه به شکل رسم شده $b = 2$.

در رابطه اصلی بیضی یعنی $a^2 = b^2 + c^2$ داریم:

$$a^2 = 4 + 16 \Rightarrow a = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

اما خروج از مرکز بیضی برابر است با:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۲۰- مرکز دایره‌ای روی خط $y = 2x$ است و این دایره، از نقاط $A(2, 1)$ و $B(-1, 4)$ عبور می‌کند. شعاع دایره چه عددی است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

پاسخ: گزینه ۳

چون دو نقطه A و B روی دایره هستند، پس فاصله آنها تا مرکز دایره با هم برابر است، لذا اگر فرض کنیم $O(\alpha, 2\alpha)$ مرکز دایره است، آنگاه:

$$OA = OB \Rightarrow OA^2 = OB^2 \Rightarrow$$

$$(\alpha - 2)^2 + (2\alpha - 1)^2 = (\alpha + 1)^2 + (2\alpha - 4)^2$$

پس داریم:

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 + 16 - 16\alpha$$

$$-8\alpha + 5 = -14\alpha + 17 \Rightarrow 6\alpha = 12 \Rightarrow \alpha = 2$$

یعنی $O(2, 4)$ مرکز دایره است لذا:

$$\text{شعاع دایره} = OB = \sqrt{(2+1)^2 + (4-4)^2} = 3 \Rightarrow R = 3$$

۲۱- مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله آنها از $A(1, 0)$ ، $\sqrt{2}$ برابر فاصله آنها از $B(0, -3)$ باشد، کدام است؟

(۲) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{12}$

(۱) دایره‌ای با شعاع $\sqrt{12}$ و مرکز O

(۴) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\sqrt{20}$

(۳) دایره‌ای با شعاع $\sqrt{20}$ و مرکز O

پاسخ: گزینه ۳

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



منظور از مکان هندسی، مجموعه نقاطی است که فاصله آنها تا A ، $\sqrt{2}$ برابر فاصله آنها تا B است. به همین جهت فرض می‌کنیم نقطه $M(x, y)$ از آن مجموعه به دلخواه باشد، پس:

$$MA = \sqrt{2}MB \Rightarrow MA^2 = 2(MB)^2$$

$$MA^2 = (x-1)^2 + (y-0)^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$MB^2 = (x-0)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9$$

$$MA^2 = 2MB^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 2y^2 + 12y + 18$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 12y + 2x + 17 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+6)^2 = 1 + 36 - 17 = 20$$

مکان یک دایره با مرکز $O \left(-1, -6 \right)$ و شعاع $\sqrt{20}$ است.

۲۲- دو دایره $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1$ و $x^2 + y^2 - 4x + 8y + k = 0$ مماس درونی هستند، k چه عددی است؟

(۴) ۱۹ و -۵

(۳) -۱۹ و ۵

(۲) فقط ۵

(۱) فقط -۱۹

پاسخ: گزینه ۴

دو دایره که فاصله مراکز آنها d و شعاع‌های آنها R_1 و R_2 باشد، به شرطی مماس درونی هستند که $|R_1 - R_2| = d$ یعنی اختلاف دو شعاع برابر فاصله دو مرکز باشد. حال شعاع و مراکز دو دایره را به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y = 1 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow O_1 \left(2, -2 \right), R_1 = 3$$

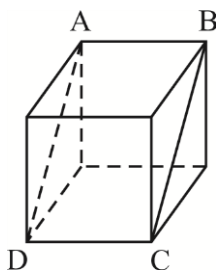
$$x^2 + y^2 - 4x + 8y + k = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + (y+4)^2 = -k + 4 + 16 \Rightarrow O_2 \left(2, -4 \right), R_2 = \sqrt{20 - k}$$

برای آنکه دو دایره مماس درونی باشند، $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$.

$$O_1O_2 = 2 \Rightarrow 2 = |3 - \sqrt{20 - k}|$$

$$\begin{cases} 2 = 3 - \sqrt{20 - k} \Rightarrow \sqrt{20 - k} = 1 \Rightarrow 20 - k = 1 \Rightarrow k = 19 \\ -2 = 3 - \sqrt{20 - k} \Rightarrow \sqrt{20 - k} = 5 \Rightarrow 20 - k = 25 \Rightarrow k = -5 \end{cases}$$

۲۳- مکعب به ضلع a با صفحه $ABCD$ برش می‌خورد. اگر مساحت مقطع حاصل $32\sqrt{2}$ شود، مقدار a کدام است؟



(۱) $4\sqrt{2}$

(۲) ۴

(۳) $8\sqrt{2}$

(۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



اگر ضلع مکعب را a فرض کنیم، صفحه $ABCD$ یک مستطیل به ضلع a و $a\sqrt{2}$ خواهد بود زیرا $BC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ در واقع، BC قطر وجه است.

$$S = a \times a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2} \Rightarrow a^2\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$$

پس $a = 4\sqrt{2}$ یعنی هر یال مکعب $4\sqrt{2}$ است.

۲۴- در مثلث قائم الزاویه ای ضلع مقابل به زاویه 30° برابر ۲ است. اگر این مثلث حول وتر دوران کند، حجم به دست آمده چه عددی است؟

$$8\pi (4)$$

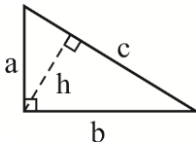
$$4\pi (3)$$

$$2\pi (2)$$

$$\frac{4\pi\sqrt{3}}{3} (1)$$

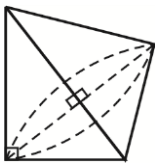
پاسخ: گزینه ۳

نکته:



$$(ab = hc)$$

اگر مثلث قائم الزاویه حول وتر دوران کند، دو مخروط پدید می آورد که در قاعده به هم چسبیده اند و شعاع قاعده همان ارتفاع وارد بر وتر است.



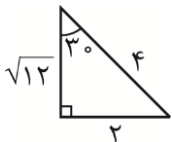
$$V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} r_1^2 \cdot h_1 + \frac{\pi}{3} r_2^2 \cdot h_2$$

$$h_1 + h_2 = \text{وتر} \quad \text{و} \quad r_1 = r_2 = \frac{ba}{c}$$

$$V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot c = \frac{\pi}{3} \frac{a^2 b^2}{c}$$

برای حل یک شکل فرضی رسم می کنیم.

حال اگر مثلث را حول وتر دوران دهیم، دو مخروط به دست می آید به طوری که:



$$V_1 + V_2 = \frac{\pi}{3} \frac{a^2 b^2}{c} = \frac{\pi}{3} \times \frac{4 \times 12}{4} = 4\pi$$

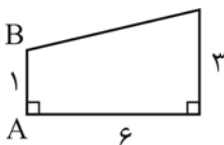
۲۵- اگر شکل مقابل حول پاره خط AB دوران کند، حجم به دست آمده چه عددی است؟

$$96\pi (1)$$

$$72\pi (2)$$

$$84\pi (3)$$

$$64\pi (4)$$

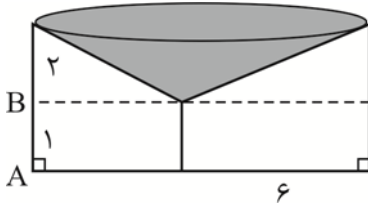


پاسخ: گزینه ۳

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



با دوران شکل حول خط AB، یک استوانه با شعاع قاعده ۶ و ارتفاع ۳ پدید می‌آید که از درون آن یک مخروط با ارتفاع ۲ و شعاع قاعده ۶ حذف کرده باشیم.



$$V = \underbrace{\pi(6)^2 \cdot 3}_{\text{حجم مخروط بالایی}} - \underbrace{\frac{\pi}{3}(6)^2 \cdot 2}_{\text{حجم مخروط بالایی}} \quad \text{مورد نظر}$$

حجم مخروط بالایی حجم استوانه

$$V = 36\pi(3 - \frac{2}{3}) = 36\pi \times \frac{7}{3} = 84\pi \quad \text{مورد نظر}$$

۲۶- احتمال تعطیلی مدرسه در روز برفی، ۰/۴۵ و در روز غیر برفی، ۰/۲۵ است. به احتمال ۰/۸ فردا برفی خواهد بود، به کدام احتمال فردا مدرسه تعطیل نمی‌شود؟

$$\frac{59}{100} \quad (۴)$$

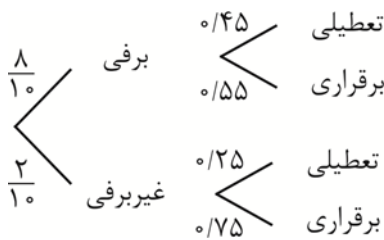
$$\frac{35}{100} \quad (۳)$$

$$\frac{65}{100} \quad (۲)$$

$$\frac{41}{100} \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

این تست را با قانون احتمال کل و البته به کمک نمودار درختی حل می‌کنیم.
در ابتدا هر روز را برفی یا غیر برفی در نظر می‌گیریم و داریم:



$$P(\text{برقراری}) = \frac{8}{10} \times \frac{55}{100} + \frac{2}{10} \times \frac{75}{100} = \frac{590}{1000} = 0.59$$

۲۷- در جعبه‌ای ۶ مهره قرمز و تعدادی مهره سفید است، دو مهره با هم از جعبه خارج می‌کنیم. احتمال آنکه همرنگ نباشند، $\frac{12}{V}$ برابر آن است که هر دو مهره سفید باشند. تعداد مهره‌های سفید درون جعبه چند تاست؟

$$۸ \quad (۴)$$

$$۱۲ \quad (۳)$$

$$۷ \quad (۲)$$

$$۱۴ \quad (۱)$$

پاسخ: گزینه ۴

فرض می‌کنیم در ابتدا n مهره سفید در جعبه بوده باشد.

$$P(\text{هر ۲ مهره همرنگ نباشند}) = \frac{\binom{n}{1} \binom{6}{1}}{\binom{n+6}{2}}$$

$$P(\text{هر ۲ مهره سفید باشد}) = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+6}{2}}$$

هر گونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوبینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.



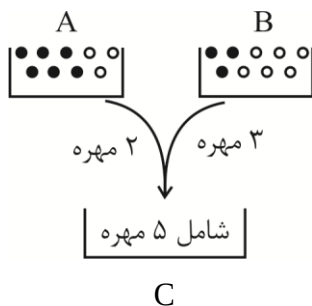
$$\Rightarrow \frac{\binom{n}{1} \binom{6}{1}}{\binom{n+6}{2}} = \frac{12}{7} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+6}{2}} \Rightarrow 7 \binom{n}{1} \binom{6}{1} = 12 \binom{n}{2}$$

$$7 \times n \times 6 = 12 \times \frac{n!}{2!(n-2)!} \Rightarrow 42n = \frac{12}{2} n(n-1) \Rightarrow 42 = 6(n-1) \Rightarrow 7 = n-1 \Rightarrow \underline{n=8}$$

۲۸- در جعبه A، ۶ مهره قرمز و ۳ مهره سفید و در جعبه B، ۳ مهره قرمز و ۶ مهره سفید داریم. دو مهره از A و سه مهره از B درون جعبه C می‌ریزیم و از جعبه C مهره‌ای به تصادف خارج می‌کنیم، به کدام احتمال سفید است؟

(۱) $\frac{8}{15}$ (۲) $\frac{7}{15}$ (۳) $\frac{9}{15}$ (۴) $\frac{10}{15}$

پاسخ: گزینه ۱



به شکل مقابل دقت کنید.

در واقع چون نمی‌دانیم چه مهره‌ای از A و B داخل جعبه C ریخته شده است، مطابق قانون احتمال کل داریم:

مهره‌ای که از کیسه انتخاب می‌کنیم یا از A انتقال یافته و یا از B منتقل شده است.

$$P(\text{سفید بودن}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{9} + \frac{3}{5} \times \frac{6}{9}$$

احتمال سفید بودن مهره در B ← مهره از B به C منتقل شده

← مهره از A به C منتقل شده

سفید بودن مهره در کیسه A

$$P(\text{سفید بودن}) = \frac{6+18}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

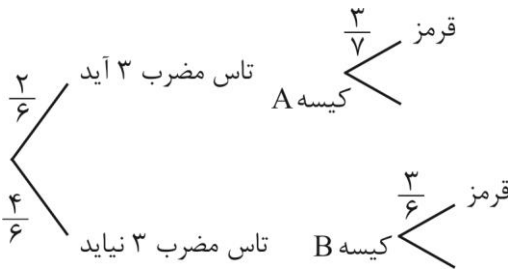
۲۹- در ظرف A، ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سفید و در ظرف B ۳ مهره سفید و ۳ مهره قرمز داریم. تاسی رها می‌شود. اگر مضرب ۳ آمد مهره‌ای از کیسه A خارج می‌کنیم، در غیر این صورت مهره‌ای از کیسه B خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره خارج شده قرمز است؟

(۱) $\frac{10}{21}$ (۲) $\frac{13}{28}$ (۳) $\frac{5}{14}$ (۴) $\frac{13}{21}$

پاسخ: گزینه ۱



مطابق قانون احتمال کل و نمودار درختی داریم:



$$P(\text{خروج مهره قرمز}) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{10}{21}$$

۳۰- احتمال آنکه فرزند دختر، بیماری ارثی داشته باشد، $0/3$ و همین احتمال برای فرزند پسر $0/2$ است. اگر مادری فرزند بیمار به دنیا آورده باشد، با کدام احتمال دختر بوده است؟

$0/2$ (۴)

$0/3$ (۳)

$0/6$ (۲)

$0/8$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

در این تست باید دقت داشته باشید تا مفهوم سوال مشخص شود. دقت کنید مادر فرزند بیمار به دنیا آورده. در واقع می‌دانیم فرزند بیمار است و می‌خواهیم دختر باشد.

$$P(\text{بیمار بودن}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

دختر بودن ←
پسری که بیمار باشد ←

پس به احتمال $\frac{1}{4}$ فرزند به دنیا آمده بیمار است. حال می‌خواهیم دختر باشد.

$$P(\text{بیمار بودن} | \text{دختر بودن}) = \frac{\text{احتمال آنکه دختر و بیمار باشد}}{\text{احتمال بیمار بودن}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{10}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{5}{20}} = \frac{3}{5} = 0/6$$

هرگونه انتشار و استفاده غیر قانونی از دوپینگ ماز با عدم رضایت گروه آموزشی ماز همراه بوده و شرعاً حرام است.

